Rozpatrywać będziemy algebrę przedziałów (IR) postaci $[a, b]$ gdzie $a < b$, o sygnaturze $\langle +, -, \cdot, \leqslant \rangle$. W IR zachodzi nierówność, którą można roboczo nazwać podrozdzielnością mnożenia względem dodawania:

$$\forall_{u,v,w \in IR} \qquad u(v + w) \leqslant uv + uw.$$

Celem jest opisanie w jakich podalgebrach IR ma miejsce rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Definicja 1 *Podalgebrę IR, w której zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania, nazwiemy rozdzielną.*

Definicja 2 *Zbiór wszystkich przedziałów postaci $[-x, x]$, gdzie $x > 0$, nazwiemy algebrą przedziałów symetrycznych i oznaczymy przez SIR.*

Łatwo sprawdzić, że SIR jest podalgebrą IR w której zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Twierdzenie 1 *SIR jest podalgebrą właściwą IR, maksymalną ze względu na relację zawierania, wśród podalgebr rozdzielnych.*

Dowód. Załóżmy że A jest podalgebrą IR zawierającą w sposób właściwy SIR. Wybierzmy element $[a, b] \in A \setminus SIR$. Jako, że $\forall_{\epsilon>0}[a - \epsilon, b + \epsilon] \in A$, to możemy założyć że $a < 0 < 1 < b$ oraz $-a \neq b$. Możemy również założyć, że $-a < b$, ponieważ gdy $-a > b$, to $[a, b][a, b] = [ab, a^2]$ oraz $-ab < a^2$.
Przy powyższych założeniach $[a, b][a, b] = [ab, b^2]$ i $-ab < b^2$. Jako że $b > 1$ i $a < 0$, to $ab - a < 0$, skąd $[ab - a, a - ab] \in SIR$, a co za tym idzie

$$[a, b] + [ab - a, a - ab] = [ab, a + b - ab] \in A.$$

Zauważmy, że $a + b - ab \neq b^2$, co wynika z tego, że $(a + b) \neq (a + b)b$ (bo $a \neq -b$ i $b \neq 1$).
Podsumowując wykazane wyżej własności elementów $[ab, b^2]$ i $[ab, a + b - ab]$, możemy stwierdzić iż w naszej podalgebrze A są elementy $[x, y]$ i $[x, z]$ takie, że $x < 0 < y$, $x < 0 < z$, $-x < y$, $-x < z$ oraz $y < z$. Wówczas, dla $\epsilon > 0$ mamy

$$[x, y]([x, z] + [-\epsilon, \epsilon]) = [x, y][x - \epsilon, z + \epsilon] =$$

$$[min\{x(z + \epsilon); y(x - \epsilon)\}, max\{x(x - \epsilon); y(z + \epsilon)\}] =$$

$$[min\{x(z + \epsilon); y(x - \epsilon)\}, y(z + \epsilon)].$$

Zauważmy, że dla dostatecznie dużych ϵ zachodzi $\epsilon(x+y) > x(y-z)$. Ustalmy taką wartość ϵ, wówczas $xz + \epsilon x > xy - \epsilon y$ a więc

$$[min\{x(z + \epsilon); y(x - \epsilon)\}, y(z + \epsilon)] = [xy - \epsilon y; yz + \epsilon y]. \qquad (*)$$

Z drugiej zaś strony

$$[x,y][x,z] + [x,y][-\epsilon,\epsilon] = [min\{xz, yx\}, yz] + [-\epsilon y, \epsilon y] =$$

$$[zx - \epsilon y; zy + \epsilon y], \qquad (**)$$

gdzie ostatnia równość wynika z tego, że $y < z$ **i** $x < 0$.
Gdyby wyrażenia (*) i (**) były równe, mielibyśmy $zx - \epsilon y = xy - \epsilon y$, a co za tym idzie $zx = xy$, co jest niemożliwe – bo $x \neq 0$ **i** $z \neq y$. **QED**

W dowodzie nie korzysta się z operacji odejmowania, więc SIR jest również podalgebrą właściwą IR o sygnaturze $\langle +, \cdot, \leqslant \rangle$, maksymalną ze względu na zawieranie wśród podalgebr rozdzielnych. Nie jest to jednak przy tej "okrojonej" sygnaturze jedyna algebra maksymalna – zbiór przedziałów o obu końcach nieujemnych posiada również własność rozdzielności i maksymalności (oczywiście dorzucając "$-$" do sygnatury otrzymalibyśmy w tym przypadku pełną algebrę IR).

Twierdzenie 2 *SIR jest jedyną właściwą podalgebrą IR, maksymalną w klasie podalgebr rozdzielnych.*

Dowód. Przyjmijmy, że A jest właściwą podalgebrą rozdzielną IR oraz $A \neq SIR$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1, możemy założyć że istnieje element $[a,b] \in A \setminus SIR$, dla którego $-a < b$. Wówczas $[a,b] - [a,b] = [a-b, b-a] \in A$, $[a,b] + [a-b, b-a] = [2a-b, 2b-a] \in A$, $[3a, 3b] \in A$. Elementy $[x,y] = [2a-b, 2b-a]$ oraz $[z,v] = [3a, 3b]$ mają własności takie, że $x < 0 < y$, $z < 0 < v$, $-x < y$, $-z < v$ oraz $y < v$ **i** $x < z$. Zauważmy, że dla dowolnego $k \in N$, $[k(a-b), k(b-a)] \in A$. Stąd dla każdej liczby $n \in N$ istnieje element $[-\delta, \delta] \in A$ taki, że $\delta > n$. Rozważmy formułę

$$[x,y]([z,v] + [-\delta,\delta]) = [x,y][z-\delta, v+\delta] =$$

$$[min\{y(z-\delta), x(v+\delta)\}; max\{x(z-\delta), y(v+\delta)\}].$$

Dla dostatecznie dużych δ zachodzi

$$(x+y)\delta > yz - xv \quad \text{oraz} \quad (y+x)\delta > xz - yv$$

i wtedy ostatnie wyrażenie przyjmie postać

$$[yz - y\delta, yv + y\delta]. \qquad (*)$$

Z drugiej zaś strony

$$[x,y][z,v] + [x,y][-\delta,\delta] =$$

$$[min\{xv, yz\}; max\{xz, yv\}] + [-\delta, \delta] =$$
$$[xv - y\delta, mox\{xz, yv\} + y\delta]. \qquad (**)$$

Równość wyrażeń (*) i (**), pociągałaby za sobą równość $xv = yz$, a to z kołei prowadziłoby (po podstawieniu z powrotem odpowiednich wartości za x, y, z, v) do sprzecznej z założeniami równości $|a| = |b|$. **QED**

Z powyższej konstrukcji wynika również następujący wniosek.

Twierdzenie 3 *Jeśli podalgebra A jest generowana przez element $u \notin SIR$, to nie jest to algebra rozdzielna.*

Powyższe rozważania możemy podsumować twierdzeniem.

Twierdzenie 4 *Jedyne podalgebry rozdzielne IR to podalgebry SIR.*